Основные правила и методы преобразования логарифмических выражений

Умение упрощать (*вычислять*) *логарифмические выражения базируется на:* а) *уверенном знании свойств логарифмов,* б) *некоторых общих приемах их преобразований, подкрепленных техникой вычислений, выработанной в процессе практической работы с логарифмами.*

Приведем несколько простых правил, позволяющих выстроить алгоритм упрощения (*вычисления*) *целого класса логарифмических выражений.*

1) *Сразу присмотритесь к данному логарифму* $\log_a b$*: не является ли его основание* a *и аргумент* b *степенями одного и того же числа* c? *Если это действительно так и* $a = c^u$, $b = c^v$, *то вам повезло: логарифм уже вычислен и он равен* $\frac{v}{u}$.

2) *Если в упрощаемом выражении логарифм присутствует на «втором этаже»* (*т. е. имеются степени, показатели которых содержат логарифмы*), *настройтесь на применение основного логарифмического тождества* $a^{\log_a x} = x$. *При этом «настройку» таких выражений, как* $a^{\log_a^n x}$, $a^{\frac{\log_b x}{\log_b a}}$, $a^{\frac{b}{\log_x a}}$, *следует проводить так:*

$$a^{\log_a^n x} = (a^{\log_a x})^{\log_a^{n-1} x}, \qquad a^{\frac{\log_b x}{\log_b a}} = a^{\log_a x}, \qquad a^{\frac{b}{\log_x a}} = a^{\log_a x^b}$$

. *В частности,* $a^{\log_a^2 x} = (a^{\log_a x})^{\log_a x} = x^{\log_a x}$.

3) *Никогда не упускайте возможности использовать тождество* $\log_a b \cdot \log_b a = 1$, *которое может быть «задрапировано» степенями аргумента и основания логарифмов. В частности,*

$$\log_{a^u} b^v \cdot \log_{b^r} a^s = \frac{vs}{ur}\left(\log_a b \cdot \log_b a\right) = \frac{vs}{ur}$$

4) *Если в преобразуемом выражении наблюдается обилие логарифмов с различными основаниями, без колебаний приведите их к какому-нибудь одному основанию.*

5) *Сложные логарифмы вида* $\log_a \log_b \log_c x$ *вычисляются последовательно, начиная с внутреннего, справа налево: сначала* $\log_c x = y$, *затем* $\log_b y = z$, *и, наконец,* $\log_a z = t$.

И еще: основные логарифмические формулы удобно разбить на две группы, которые мы будем называть формулами упаковки и формулами распаковки.

- *Формулы упаковки*: $\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$, $\quad \log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$,

  $p \cdot \log_a b = \log_a b^p$, $\quad \frac{1}{q} \cdot \log_a b = \log_{a^q} b$.

- *Формулы распаковки*: $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$, $\qquad \log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$,

  $\log_a b^p = p \cdot \log_a b$, $\quad \log_{a^q} b = \frac{1}{q} \cdot \log_a b$.

Во многих задачах вычисление значения некоторого логарифмического выражения предполагает предварительное конструирование его из одного или двух логарифмов, которые удобно назвать «атомами».

Вначале рассмотрим «одноатомные задачи». В них требуется вычислить значение логарифмического выражения A *при заданном значении некоторого «атома»* $\log_n m$. *В отдельных задачах такого типа «атом» в условии не указан, что предполагает самостоятельный выбор «атома», исходя из вида логарифмов в* A. *При этом знать числовое значение «атома»* $\log_n m$ *не нужно – важно только, чтобы числа* n *и* m *позволяли легко реализовать третий шаг приведенного ниже алгоритма.*

Итак, общий алгоритм решения «одноатомных задач» следующий:

1) *если «атом» можно представить в виде* $\log_{n^k} m^r$ *, то запишите его как* $\frac{r}{k}\log_n m$*;*

2) *приведите все логарифмы из выражения* A *к одному основанию* n;

3) *все числа, стоящие под знаками логарифмов, выразите через* m *и* n *с помощью операций умножения, деления и возведения в степень*;

4) *с помощью формул распаковки выразите все логарифмы через «атом»* $\log_n m$*;*

5) упростите полученное выражение.

Задача 1. Найти $\log_{81} 3,6$, если $\log_{0,4} 27 = a$.

Решение. Так как $\log_{0,4} 27 = 3\log_{0,4} 3 = a$, то в качестве «атома» берем $\log_n m = \log_{0,4} 3 = \frac{a}{3}$. Так как в данном случае $n = 0,4,\quad m = 3$, то приведем искомый логарифм к основанию 0,4: $\log_{81} 3,6 = \frac{\log_{0,4} 3,6}{\log_{0,4} 81}$.

Теперь выразим числа 3,6 и 81 через числа $n = 0,4$ и $m = 3$ с помощью операций умножения, деления и возведения в степень: $3,6 = 0,4 \cdot 3^2$, $81 = 3^4$. Отсюда

$$\log_{0,4} 3,6 = \log_{0,4}\left(0,4 \cdot 3^2\right) = \log_{0,4} 0,4 + \log_{0,4} 3^2 = 1 + 2\log_{0,4} 3 = 1 + \frac{2}{3}a;$$

$$\log_{0,4} 81 = \log_{0,4} 3^4 = 4\log_{0,4} 3 = \frac{4}{3}a.$$

В итоге имеем: $\log_{81} 3,6 = \frac{1 + \frac{2}{3}a}{\frac{4}{3}a} = \frac{3 + 2a}{4a}$.

Задача 2. Вычислить $A = \log_{12} 18 \cdot \log_{24} 54 + 5\left(\log_{12} 18 - \log_{24} 54\right)$.

Решение. В условии этой задачи «атом» не указан. Тем не менее ее удобно решить как «одноатомную задачу», если в качестве «атома» выбрать $a = \log_3 2$, поскольку через числа 3 и 2 с помощью операций умножения и деления легко выражаются числа 12, 18, 54, 24.

Итак, в соответствии с алгоритмом решения «одноатомных задач» имеем:

$$\log_{12} 18 = \frac{\log_3\left(3^2 \cdot 2\right)}{\log_3\left(3 \cdot 2^2\right)} = \frac{2 + \log_3 2}{1 + 2\log_3 2} = \frac{2 + a}{1 + 2a},$$

$$\log_{24} 54 = \frac{\log_3\left(3^3 \cdot 2\right)}{\log_3\left(3 \cdot 2^3\right)} = \frac{3 + \log_3 2}{1 + 3\log_3 2} = \frac{3 + a}{1 + 3a}.$$

В итоге получаем:

$$A = \frac{2 + a}{1 + 2a} \cdot \frac{3 + a}{1 + 3a} + 5\left(\frac{2 + a}{1 + 2a} - \frac{3 + a}{1 + 3a}\right) =$$

$$= \frac{a^2 + 5a + 6}{(1 + 2a)(1 + 3a)} + \frac{5\left(a^2 - 1\right)}{(1 + 2a)(1 + 3a)} = \frac{6a^2 + 5a + 1}{(1 + 2a)(1 + 3a)} = 1.$$

Жанна Альбертовна, Аркадий Александрович