Как научиться решать текстовые задачи: основные идеи и алгоритмы

(*задачи и комментарии углубленного уровня отмечены звездочкой* *)

С текстовыми задачами начинают знакомиться уже в начальных классах. Эти задачи важны тем, что прививают навыки построения и анализа математических моделей простейших механических, физических и химических процессов, связанных с движением, работой, растворами, сплавами и т.д. Решение текстовых задач вызывает трудности в силу их нестандартности и разнообразия формулировок.

Здесь мы попытаемся унифицировать подходы к решению текстовых задач с помощью так называемого метода пошаговой формализации условий задачи, или, сокращенно, МПФ. *Суть* МПФ *состоит в следующем*:

а) *каждый фрагмент* (*или отдельная фраза*) *условия текстовой задачи записывается в виде алгебраического выражения*;

б) *по завершении этого процесса выбираются два алгебраических выражения, описывающих одну и ту же величину, и приравниваются друг к другу*;

в) *в результате получается уравнение* (*если таких пар выражений одна*) *или система уравнений* (*если таких пар выражений несколько*), *которые следует решить для нахождения искомой величины.*

Конечно же, МПФ *имеет свои специфические особенности, зависящие от типа текстовой задачи. Поэтому мы условно разобьем текстовые задачи на несколько традиционных классов – задачи на проценты, растворы (сплавы), работу, движение, демонстрируя* МПФ *в каждом из этих классов отдельно. Отметим, что такое разбиение весьма условно и всегда найдутся задачи, выходящие за его рамки* (*см. например, задачу* 19*). *Тем не менее, большинство текстовых задач все же можно отнести к одному из перечисленных выше классов.*

Задача 1. Аквариум частично заполнен водой. За месяц 40% воды испарилось. При этом объем воздуха в аквариуме увеличился на 60%. Какую часть объема аквариума в процентах занимала вода в конце месяца?

Решение. Применим МПФ. Начнем с первой фразы: «Аквариум частично заполнен водой». Формализуем ее так: пусть

x – начальный объем воды в аквариуме,

y – объем аквариума.

Поскольку речь в задаче также пойдет и о воздухе, то добавим:

$y-x$ – начальный объем воздуха в аквариуме.

Следующая фраза «за месяц 40% воды испарилось» формализуется так:

$\dfrac{60x}{100}$ – объем воды в аквариуме в конце месяца,

$y-\dfrac{60x}{100}$ – объем воздуха в аквариуме в конце месяца.

Следующая фраза «при этом объем воздуха в аквариуме увеличился на 60%» формализуется так:

$\dfrac{160(y-x)}{100}$ – объем воздуха в аквариуме в конце месяца (поскольку $y-x$ – начальный объем воздуха в аквариуме).

Условия задачи завершаются вопросом «Какую часть объема аквариума в процентах занимала вода в конце месяца?». Поскольку объем воды в аквариуме в конце месяца равен $\dfrac{60x}{100}$, а объем аквариума равен y, то вопрос задачи формализуется так: требуется найти $\left(\dfrac{60x}{100}:y\right)\cdot 100=\dfrac{60x}{y}$.

Среди составленных алгебраических выражений имеются два, означающие одну и ту же величину (объем воздуха в аквариуме в конце месяца) – это $y-\dfrac{60x}{100}$ и $\dfrac{160(y-x)}{100}$. Приравняем их и упростим полученное уравнение: $y-\dfrac{60x}{100}=\dfrac{160(y-x)}{100}$ $\Leftrightarrow$ $100x=60y$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{5}$.

Отсюда искомая величина равна $\dfrac{60x}{y}=60\cdot\dfrac{3}{5}=36\%$.

Задача 2. Стоимость алмаза пропорциональна квадрату его массы. При огранке алмаз раскололся на две части. Стоимость одной из частей оказалась на 98,56% меньше, чем первоначальная стоимость алмаза. Сколько процентов от первоначальной массы алмаза составляет масса этой части?

Решение. Применим МПФ. Фраза «стоимость алмаза пропорциональна квадрату его массы» формализуется так: пусть x – масса алмаза, тогда cx^2 – его стоимость, где c – коэффициент пропорциональности.

Фраза «при огранке алмаз раскололся на две части» формализуется так:
y – масса одной из частей алмаза (пусть это будет первая часть),
cy^2 – стоимость этой части алмаза.

Фраза «стоимость оказалась на 98,56% меньше, чем первоначальная стоимость алмаза» формализуется так:

$cx^2\cdot\dfrac{(100-98{,}56)}{100}$ – стоимость первой части алмаза.

Завершается условие задачи вопросом: «сколько процентов от первоначальной массы алмаза составляет масса первой части?», т. е. требуется найти $\dfrac{y}{x}\cdot 100$.

Среди составленных алгебраических выражений имеются два, означающие одну и ту же величину – стоимость первой части алмаза: cy^2 и $cx^2\cdot\dfrac{(100-98{,}56)}{100}$. Приравняем их и упростим полученное уравнение:

$$cy^2 = cx^2 \cdot \frac{(100-98,56)}{100} \;\Leftrightarrow\; \frac{y^2}{x^2} = \frac{1,44}{100} \;\Leftrightarrow\; \frac{y}{x} = \frac{1,2}{10}.$$

Отсюда искомая величина $\frac{y}{x} \cdot 100$ равна 12.

Задача 3. Некто оставил в наследство определенную сумму денег, разделив ее между наследниками следующим образом: первый получил 1000 и $\frac{1}{8}$ часть оставшейся суммы, затем второй получил 2000 и $\frac{1}{8}$ часть оставшейся (после этого) суммы, третий наследник получил 3000 и опять $\frac{1}{8}$ часть оставшейся суммы и т. д. В результате оказалось, что вся сумма денег разделена между наследниками поровну. Найти количество наследников и величину завещанного состояния.

Решение. Применим МПФ. Фраза «некто оставил в наследство сумму денег» формализуется так: пусть S – сумма, оставленная k наследникам. Фраза «первый получил 1000 и $\frac{1}{8}$ часть оставшейся суммы» формализуется так: первый получил сумму a_1, равную $1000 + (S-1000)\frac{1}{8}$.

Фраза «затем второй получил 2000 и $\frac{1}{8}$ часть оставшейся суммы» формализуется так: второй получил сумму a_2, равную $2000 + (S - a_1 - 2000)\frac{1}{8}$. Информацию о других наследниках игнорируем, попробовав обойтись только информацией о том, что все наследники получили наследство поровну. Последнее формализуется так:

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{S}{k} \\ a_2 = \dfrac{S}{k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1000 + (S-1000)\dfrac{1}{8} = \dfrac{S}{k}, \\ 2000 + (S - \dfrac{S}{k} - 2000)\dfrac{1}{8} = \dfrac{S}{k} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \dfrac{7}{8} \cdot 1000 + \dfrac{S}{8} = \dfrac{S}{k}, \\ \dfrac{7}{8} \cdot 2000 + \dfrac{S}{8} - \dfrac{S}{8k} = \dfrac{S}{k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{7}{8}(2000-1000) = \dfrac{S}{8k}, \\ \dfrac{7}{8} \cdot 1000 + \dfrac{S}{8} = \dfrac{S}{k} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7000 = \dfrac{S}{k}, \\ \dfrac{7}{8} \cdot 1000 + \dfrac{S}{8} = 7000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 7, \\ S = 49000. \end{cases}$$

Имеется класс задач, в которых одна из компонент двух объектов, описываемых в условии задачи, явно не называется. Такие задачи назовем «неполными». Все «неполные» задачи легко распознаются и к тому же решаются однообразно: необходимо только «отслеживать» количество неназванной компоненты, остающееся неизменным при переходе от первого *объекта ко второму. Следующих двух задач будет вполне достаточно, чтобы убедиться в этом.*

Задача 4. Руда содержит 40% примесей. Из руды выплавили некоторое количество металла, содержащего 4% примесей. Сколько металла можно получить из 24 кг руды?

Решение. Если ошибочно считать, что руда состоит из примесей и металла, то тогда возникает закономерный вопрос: какую компоненту, помимо примесей, содержит металл? Эта компонента как раз и не названа в условии. Назовем ее чистым металлом. Тогда все становится на свои места: руда состоит из примесей и чистого металла, металл состоит из примесей и чистого металла, и количество чистого металла в процессе переработки руды в металл не изменяется. Применим теперь МПФ.

Формализуем фразу «руда содержит 40% примесей»:

$\dfrac{24 \cdot 60}{100}$ – количество чистого металла в 24 кг руды.

Фраза «из руды выплавили некоторое количество металла, содержащего 4% примесей» формализуется так: если x – количество полученного металла, то

$\dfrac{x \cdot 96}{100}$ – количество чистого металла в металле.

Поскольку количество чистого металла осталось неизменным, то получаем уравнение: $\dfrac{24 \cdot 60}{100} = \dfrac{x \cdot 96}{100} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{x} = 15$.

Задача 5. Сколько килограммов воды нужно выпарить из целлюлозы, содержащей 85% воды, чтобы получить 300 кг сухой целлюлозы, содержащей 75% воды?

Решение. Из условия сразу ясно, что данная задача «неполная»: сухая целлюлоза содержит воду и некоторую неупомянутую компоненту, которую условно назовем твердой массой. Итак, целлюлоза содержит воду и твердую массу, сухая целлюлоза также содержит воду и твердую массу, и количество твердой массы в процессе выпаривания воды из целлюлозы остается неизменной (различаются целлюлоза и сухая целлюлоза только количеством содержащейся в них воды). Применим теперь МПФ.

Фраза «из целлюлозы, содержащей 85% воды» формализуется так:

x – количество целлюлозы,

$\dfrac{x \cdot 15}{100}$ – количество твердой массы в целлюлозе.

Фраза «300 кг сухой целлюлозы, содержащей 75% воды» формализуется так:

$\dfrac{300 \cdot 25}{100}$ – количество твердой массы в 300 кг сухой целлюлозы.

Фраза «сколько килограммов воды нужно выпарить из целлюлозы, чтобы получить 300 кг сухой целлюлозы» формализуется так: искомое количество воды равно $x - 300$.

Поскольку количество твердой массы в целлюлозе и сухой целлюлозе одинаково, то имеем уравнение:

$$\frac{x \cdot 15}{100} = \frac{300 \cdot 25}{100} \quad \Leftrightarrow \quad \text{x} = 500.$$

Отсюда $x - 300 = 500 - 300 = 200$.

Задачи на сплавы и растворы можно условно разбить на две группы: задачи, в которых концентрации остаются неизменными; задачи с изменяющейся концентрацией «главного» вещества.

Основной принцип при решении задач второй группы заключается в том, чтобы на каждом шаге МПФ «*обновлять*» *данные трех типов*: а) *общие объемы растворов* (*сплавов*), б) *количества в них главного вещества*, в) *концентрации главного вещества*.

Задача 6. Имеется два сплава, каждый из которых состоит из цинка, меди и олова. Первый сплав содержит 40% олова, второй – 26% меди. Процентное содержание цинка в первом и во втором сплавах одинаково. Сплавив 150 кг первого сплава и 250 кг второго, получили третий сплав, в котором 30% цинка. Сколько килограммов олова в третьем сплаве?

Решение. Применим МПФ. Фраза «сплавив 150 кг первого сплава и 250 кг второго, получили третий сплав» формализуется так:
Взято 150 – масса первого сплава, 250 – масса второго сплава,
Получено 400 – масса третьего сплава.

Фраза «первый сплав содержит 40% олова, второй – 26% меди» формализуется так:

$\frac{40 \cdot 150}{100}$ – масса олова в первом сплаве,

$\frac{26 \cdot 250}{100}$ – масса меди во втором сплаве.

Фраза «процентное содержание цинка в первом и во втором сплавах одинаково» формализуется так: пусть x – процентное содержание цинка в первом и во втором сплавах, тогда

$\frac{150x}{100}$ – масса цинка в первом сплаве,

$\frac{250x}{100}$ – масса цинка во втором сплаве,

$\frac{150x}{100} + \frac{250x}{100}$ – масса цинка в третьем сплаве.

Фраза «получили третий сплав, в котором 30% цинка» формализуется так:

$\frac{400 \cdot 30}{100}$ – масса цинка в третьем сплаве.

Условие задачи завершается вопросом «сколько килограммов олова в третьем сплаве?», который формализуется так (вспомним, что процентное содержание меди и цинка во втором сплаве соответственно равно 26% и x% , а масса олова в первом сплаве равна $\frac{40 \cdot 150}{100}$):

$(100-26-x)$ – процентное содержание олова во втором сплаве,

$\frac{250 \cdot (100-26-x)}{100}$ – масса олова во втором сплаве,

$\frac{40 \cdot 150}{100}+\frac{250 \cdot (100-26-x)}{100}$ – масса олова в третьем сплаве.

Среди составленных алгебраических выражений имеются два, означающие одну и ту же величину – массу цинка в третьем сплаве:

$$\frac{150x}{100}+\frac{250x}{100} \text{ и } \frac{400 \cdot 30}{100}.$$

Приравняем их и упростим полученное уравнение:

$$\frac{150x}{100}+\frac{250x}{100}=\frac{400 \cdot 30}{100} \quad \Leftrightarrow \quad x=30.$$

Теперь можно ответить на вопрос задачи: масса олова в третьем сплаве равна $\frac{40 \cdot 150}{100}+\frac{250 \cdot (100-26-30)}{100}=170$.

Задача 7. Из молока, жирность которого составляет 5%, изготавливают некоторое количество творога, жирность которого составляет 15,5%. При этом остается сыворотка с жирностью 0,5%. Сколько творога можно получить из 1000 кг молока?

Решение. Применим МПФ. Фраза «из молока, жирность которого составляет 5%, изготавливают некоторое количество творога» формализуется так:

$\frac{1000 \cdot 5}{100}$ – масса жира в молоке,

x – масса получаемого творога.

Фраза «жирность творога составляет 15,5%» формализуется так:

$\frac{15{,}5x}{100}$ – масса жира в твороге.

Фраза «при этом остается сыворотка с жирностью 0,5%» формализуется так:

$1000-x$ – масса сыворотки, полученной из молока,

$\frac{(1000-x) \cdot 0{,}5}{100}$ – масса жира в сыворотке,

$\frac{15{,}5x}{100}+\frac{(1000-x) \cdot 0{,}5}{100}$ – масса жира в твороге и сыворотке.

Среди составленных алгебраических выражений имеются два, равные одной и той же величине – массе жира в молоке:

$$\frac{15{,}5x}{100}+\frac{(1000-x) \cdot 0{,}5}{100} \text{ и } \frac{1000 \cdot 5}{100}.$$

Приравняем их и упростим полученное уравнение:

$$\frac{15{,}5x}{100}+\frac{(1000-x)\cdot 0{,}5}{100}=\frac{1000\cdot 5}{100} \Leftrightarrow 3{,}1x+(1000-x)\cdot 0{,}1=1000 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x=900 \Leftrightarrow x=300.$$

***** *Рассмотрим теперь несколько задач, связанных с изменяющейся концентрацией «главного» вещества, при решении которых нужно «обновлять» данные по общему объему растворов (сплавов), количеству в них главного вещества и его концентрации.*

При этом следует помнить, что на каждом шаге одна из величин – количество «главного» вещества или его концентрация – остается неизменной: в случае неизменности концентрации k новое количество «главного» вещества определяется по формуле $k\cdot V$, где V – объем раствора (сплава), а в случае неизменности количества m «главного» вещества новая его концентрация определяется по формуле $\frac{m}{V}$.

Задача 8*. В банке 20 л соляной кислоты. Часть кислоты отлили, а затем дополнили банку водой. Затем отлили в 2 раза больше, чем в первый раз, и опять дополнили водой. В результате получился 28%-й раствор. Сколько литров кислоты отлили в первый раз?

Решение. «Главное» вещество здесь – соляная кислота. Будем отслеживать и обновлять после каждого шага три величины: объем раствора, количество соляной кислоты в нем и ее концентрацию.

Шаг 1. Фраза «в банке 20 л соляной кислоты» означает, что 20 – объем раствора, 20 – количество кислоты, 1 – концентрация кислоты.

Шаг 2. Фраза «часть кислоты отлили» означает, что концентрация не изменилась, а изменилось количество «главного» вещества:
$20-x$ – объем раствора, 1 – концентрация кислоты, $(20-x)\cdot 1$ – количество кислоты.

Шаг 3. Фраза «дополнили банку водой» означает, что не изменилось количество «главного» вещества, а изменилась его концентрация:
20 – объем раствора, $(20-x)\cdot 1$ – количество кислоты, $\frac{(20-x)\cdot 1}{20}$ – концентрация кислоты.

Шаг 4. Фраза «затем отлили в 2 раза больше, чем в первый раз» означает, что концентрация не изменилась, а изменилось количество «главного» вещества: $20-2x$ – объем раствора, $\frac{(20-x)\cdot 1}{20}$ – концентрация кислоты, $(20-2x)\cdot\frac{(20-x)\cdot 1}{20}$ – количество кислоты.

Шаг 5. Фраза «и опять дополнили водой» означает, что не изменилось количество «главного» вещества, а изменилась его концентрация:

20 – объем раствора, $(20-2x)\cdot\frac{(20-x)\cdot 1}{20}$ – количество кислоты, $\frac{(20-2x)\cdot\frac{(20-x)\cdot 1}{20}}{20}$ – концентрация кислоты.

Фраза «в результате получился 28%-й раствор» приводит к уравнению

$$\frac{(20-2x)\cdot(20-x)}{20\cdot 20}=\frac{28}{100} \Leftrightarrow (10-x)(20-x)=2\cdot 28 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-30x+144=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=6, \\ x=24. \end{array}\right.$$

Корень $x=24$ не подходит по смыслу задачи. Поэтому искомый ответ: 6 л.

Задача 9*. В двух сосудах находилось соответственно 600 г и 150 г растворов соли различной концентрации. Из каждого сосуда взяли одновременно по n граммов раствора. Взятое из первого сосуда вылили во второй, а взятое из второго – в первый. После этого концентрации растворов в обоих сосудах стали одинаковыми. Чему равно n?

Решение. «Главное» вещество здесь – соль. Будем отслеживать и обновлять после каждого шага величины трех типов: объемы растворов, количества соли в них и ее концентрации.

Шаг 1. Фраза «в двух сосудах находилось соответственно 600 г и 150 г растворов соли различной концентрации» означает, что

600 – объем первого раствора, x – концентрация соли в первом растворе, $600x$ – количество соли в первом растворе;

150 – объем второго раствора, y – концентрация соли во втором растворе, $150y$ – количество соли во втором растворе; $x\neq y$.

Шаг 2. Фраза «из каждого сосуда взяли одновременно по n граммов раствора» означает:

$600-n$ – осталось первого раствора, x – концентрация соли в первом растворе, $(600-n)x$ – осталось соли в первом растворе, nx – забрали соли из первого раствора;

$150-n$ – осталось второго раствора, y – концентрация соли во втором растворе, $(150-n)y$ – осталось соли во втором растворе, ny – забрали соли из второго раствора.

Шаг 3. Фраза «взятое из первого сосуда вылили во второй, а взятое из второго – в первый» означает:

600 – объем первого раствора, $(600-n)x+ny$ – количество соли в первом растворе, $\frac{(600-n)x+ny}{600}$ – концентрация соли в первом растворе;

150 – объем второго раствора, $(150-n)y+nx$ – количество соли во втором растворе, $\frac{(150-n)y+nx}{150}$ – концентрация соли во втором растворе.

Фраза «после этого концентрации растворов в обоих сосудах стали одинаковыми» приводит к уравнению:

$$\frac{(600-n)x+ny}{600}=\frac{(150-n)y+nx}{150} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ (600-n)x+ny=4\cdot((150-n)y+nx) \ \Leftrightarrow \ 600x-600y=5nx-5ny \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ 120(x-y)=n(x-y) \ \Leftrightarrow \ n=120.$$

Процесс пошаговой формализации условий задачи на работу лучше всего начинать с ее вопроса (*хотя бывают исключения*).

Помните, что практически во всех задачах на работу главными параметрами для составления уравнений являются производительности. Поэтому старайтесь сразу их задействовать, даже если в вопросе задачи речь идет совсем о других параметрах (*см. задачи* 10 – 13).

Часто возникают ситуации, когда число используемых вами переменных превышает число составленных уравнений (*см. задачу* 12*). *В подобных случаях не стремитесь определить все переменные* (*тем более, что это невозможно*), *а ориентируйтесь на то, что требуется найти в задаче.*

Задача 10. Заказ по изготовлению деталей выполняется на станках двух типов. За 9 ч выполняют весь заказ 47 станков первого типа и 36 станков второго типа, а за 18 ч выполняют весь заказ 17 станков первого типа и 43 станка второго типа. На сколько процентов время выполнения заказа одним станком первого типа меньше времени выполнения заказа одним станком второго типа?

Решение. МПФ начнем с вопроса задачи: пусть

x – время выполнения заказа одним станком первого типа,

y – время выполнения заказа одним станком второго типа,

$\frac{x}{y}\cdot 100-100$ – искомая величина.

Теперь задействуем производительности: пусть

z – объем всего заказа,

$\frac{z}{x}$ – производительность станка первого типа,

$\frac{z}{y}$ – производительность станка второго типа.

Фраза «за 9 ч выполняют весь заказ 47 станков первого типа и 36 станков второго типа» формализуется так:

$9\left(47\cdot\frac{z}{x}+36\cdot\frac{z}{y}\right)$ – объем всего заказа.

Фраза «за 18 ч выполняют весь заказ 17 станков первого типа и 43 станка второго типа» формализуется так:

$18\left(17\cdot\frac{z}{x}+43\cdot\frac{z}{y}\right)$ – объем всего заказа.

Среди составленных алгебраических выражений имеются два, равные одной и той же величине – объему всего заказа:

$$9\left(47\cdot\frac{z}{x}+36\cdot\frac{z}{y}\right) \text{ и } 18\left(17\cdot\frac{z}{x}+43\cdot\frac{z}{y}\right).$$

Приравняв их, получим уравнение

$$9\left(47\cdot\frac{z}{x}+36\cdot\frac{z}{y}\right)=18\left(17\cdot\frac{z}{x}+43\cdot\frac{z}{y}\right) \Leftrightarrow \frac{47}{x}+\frac{36}{y}=2\left(\frac{17}{x}+\frac{43}{y}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{13}{x}=\frac{50}{y} \Leftrightarrow \frac{x}{y}=\frac{13}{50}.$$

Отсюда находим искомую величину:

$$\frac{x}{y}\cdot 100-100=\frac{13}{50}\cdot 100-100=-74\%.$$

Задача 11. Второй рабочий приступил к работе на час позже первого, а закончили они всю работу одновременно. После двух часов их совместной работы им осталось выполнить $9/20$ всей работы. По окончании работы оказалось, что каждый выполнил половину всей работы. За сколько часов каждый, работая отдельно, может выполнить всю работу?

Решение. МПФ начнем с вопроса задачи: пусть

x – время, за которое первый рабочий (без второго) может выполнить всю работу,

y – время, за которое второй рабочий (без первого) может выполнить всю работу.

Теперь задействуем производительности: пусть

z – объем всей работы,

$\frac{z}{x}$ – производительность первого рабочего,

$\frac{z}{y}$ – производительность второго рабочего.

Фраза «второй рабочий приступил к работе на час позже первого, а закончили они всю работу одновременно» формализуется так:

1 ч – время, которое первый рабочий работал дольше второго,

$\frac{z}{x}\cdot 1$ – объем работы, выполненный первым рабочим до того, как к работе приступил второй.

Фраза «после двух часов их совместной работы им осталось выполнить $9/20$ всей работы» формализуется так:

$\left(\dfrac{z}{x}+\dfrac{z}{y}\right)\cdot 2$ – объем работы, выполненный двумя рабочими за 2 ч их совместной работы,

$\left(\dfrac{z}{x}+\dfrac{z}{y}\right)\cdot 2+\dfrac{z}{x}\cdot 1$ – объем работы, выполненный двумя рабочими через 3 ч с момента начала работы первого,

$z-\dfrac{9}{20}z=\dfrac{11}{20}z$ – объем работы, выполненный двумя рабочими через 3 ч с момента начала работы первого.

Фраза «по окончании работы оказалось, что каждый выполнил половину всей работы» формализуется так:

$\dfrac{z}{2}$ – общий объем работы, выполненный первым рабочим,

$\dfrac{z}{2}$ – общий объем работы, выполненный вторым рабочим,

$\dfrac{z}{2}:\dfrac{z}{x}=\dfrac{x}{2}$ – общее время работы первого рабочего,

$\dfrac{z}{2}:\dfrac{z}{y}=\dfrac{y}{2}$ – общее время работы второго рабочего,

$\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{2}$ – время, на которое первый рабочий работал дольше второго.

Среди составленных алгебраических выражений имеются две пары выражений, одинаковых по смыслу: первая пара таких выражений – $\left(\dfrac{z}{x}+\dfrac{z}{y}\right)\cdot 2+\dfrac{z}{x}\cdot 1$ и $\dfrac{11}{20}z$ – объем работы, выполненный за 3 ч с момента начала работы первого рабочего, вторая пара – это 1 и $\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{2}$ – время, на которое первый рабочий работал дольше второго. Таким образом, имеем систему уравнений:

$$\begin{cases}\left(\dfrac{z}{x}+\dfrac{z}{y}\right)\cdot 2+\dfrac{z}{x}\cdot 1=\dfrac{11}{20}z,\\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{3}{y+2}+\dfrac{2}{y}=\dfrac{11}{20},\\ x=y+2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}11y^2-78y-80=0,\\ x=y+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=8,\\ x=10.\end{cases}$$

Задача 12*. Пять человек выполняют некоторую работу. Первый, второй и третий, работая вместе, могут выполнить всю работу за 7,5 ч, первый, третий и пятый вместе – за 5 ч, первый, третий и четвертый вместе –

за 6 ч, а второй, четвертый и пятый вместе – за 4 ч. За какой промежуток времени выполнят эту работу все 5 человек, работая вместе?

Решение. Введем производительности: x, y, z, t, u – производительности соответственно первого, второго, третьего, четвертого, пятого рабочих в час.

Вопрос задачи формализуется так: пусть
ω – время, за которое выполнят всю работу все 5 человек, работая вместе, тогда $(x+y+z+t+u)\cdot\omega$ – объем всей работы.

Фраза «первый, второй и третий, работая вместе, могут выполнить всю работу за 7,5 ч» формализуется так:
$7{,}5\cdot(x+y+z)$ – объем всей работы.

Фраза «первый, третий и пятый, работая вместе, могут выполнить всю работу за 5 ч» формализуется так:
$5\cdot(x+z+u)$ – объем всей работы.

Фраза «первый, третий и четвертый, работая вместе, могут выполнить всю работу за 6 ч» формализуется так:
$6\cdot(x+z+t)$ – объем всей работы.

Фраза «второй, четвертый и пятый, работая вместе, могут выполнить всю работу за 4 ч» формализуется так:
$4\cdot(y+t+u)$ – объем всей работы.

Среди составленных алгебраических выражений имеются 4 пары выражений, равных одной и той же величине – объему выполненной работы. Они приводят к системе уравнений, в которой число переменных больше числа уравнений:

$$\begin{cases} 7{,}5\cdot(x+y+z)=(x+y+z+t+u)\cdot\omega, \\ 5\cdot(x+z+u)=(x+y+z+t+u)\cdot\omega, \\ 6\cdot(x+z+t)=(x+y+z+t+u)\cdot\omega, \\ 4\cdot(y+t+u)=(x+y+z+t+u)\cdot\omega \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=(x+y+z+t+u)\cdot\dfrac{\omega}{7{,}5}, \\ x+z+u=(x+y+z+t+u)\cdot\dfrac{\omega}{5}, \\ x+z+t=(x+y+z+t+u)\cdot\dfrac{\omega}{6}, \\ y+t+u=(x+y+z+t+u)\cdot\dfrac{\omega}{4}. \end{cases}$$

Умножив обе части последнего уравнения на 2 и сложив почленно затем все уравнения, придем к уравнению:

$$3\cdot(x+y+z+t+u)=(x+y+z+t+u)\cdot\left(\frac{\omega}{7{,}5}+\frac{\omega}{5}+\frac{\omega}{6}+\frac{\omega}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 3=\frac{\omega}{7{,}5}+\frac{\omega}{5}+\frac{\omega}{6}+\frac{\omega}{2}\ \Leftrightarrow\ 3=\omega.$$

К задачам на движение МПФ *применяется наиболее эффективно. При этом в каждой задаче следует следить за унификацией* (*приведением к одному типу*) *единиц измерения скорости, расстояния, времени, отдавая* *предпочтение тем единицам измерения, о которых говорится в условии задачи. Так, если в задаче* 13 *в качестве единицы измерения скорости принять км/сек, то получится система из двух уравнений с тремя переменными, не позволяющая определить значения этих переменных.*

Практически в каждой задаче на движение используются следующие две формулы (*см. шаг* 1): *если расстояние между объектами в момент начала их движения равно* S *км, а их скорости равны* v *км/ч и* u *км/ч, то*:

а) *при движении этих объектов навстречу друг другу они встретятся через* $\dfrac{S}{v+u}$ *ч;*

б) при движении этих объектов в одном направлении объект с большей скоростью υ *догонит объект с меньшей скоростью* u *через* $\dfrac{S}{v-u}$ *ч* (*см. задачи* 13–17). *При этом в качестве объектов необязательно должны быть движущиеся средства или живые существа* (*см. задачу* 14).

Задача 13. Два бегуна бегают по замкнутой дорожке. Скорость каждого постоянна, но на пробег всей дорожки первый тратит на 10 с меньше второго. Если они начнут забег с общего старта в одном направлении, то будут встречаться каждые 720 с. Какую часть всей дорожки пробегает в секунду каждый бегун?

Решение. Применим МПФ. Начнем с вопроса «какую часть всей дорожки пробегает в секунду каждый бегун?»: пусть

x – скорость первого бегуна (часть/с),

y – скорость второго бегуна (часть/с).

Поскольку в качестве длины выбрана единица измерения «часть дорожки», то фраза «два бегуна бегают по замкнутой дорожке» формализуется так:

1 часть – длина дорожки.

Фраза «на пробег всей дорожки первый тратит на 10 с меньше второго» формализуется так:

$\dfrac{1}{x}$ – время, за которое первый пробегает всю дорожку,

$\dfrac{1}{y}$ – время, за которое второй пробегает всю дорожку,

$\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}$ – разница во времени пробега бегунами всей дорожки.

Фраза «если они начнут забег с общего старта в одном направлении, то будут встречаться каждые 720 с» означает:

$\dfrac{1}{x-y}=720$ – время между их встречами.

Итак, имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}=10, \\ \dfrac{1}{x-y}=720 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=10xy, \\ x-y=\dfrac{1}{720} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{720}=10y\left(y+\dfrac{1}{720}\right), \\ x=y+\dfrac{1}{720} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7200y^2+10y-1=0, \\ x=y+\dfrac{1}{720} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{1}{90}, \\ x=\dfrac{1}{80}. \end{cases}$$

Задача 14. Три свечи имеют одинаковую длину, но разную толщину. Первая свеча была зажжена на 1 ч раньше двух других, зажженных одновременно. В некоторый момент горения первая и третья свечи имели одинаковую длину, а через 2 ч после этого первая и вторая свечи стали иметь одинаковую длину. За сколько часов сгорает первая свеча, если вторая сгорает за 12 ч, а третья – за 8 ч?

Решение. Применим МПФ. Фраза «три свечи имеют одинаковую длину» и вопрос задачи «за сколько часов сгорает первая свеча, если вторая сгорает за 12 ч, а третья – за 8 ч?» формализуется так: пусть

z – начальная длина свечей,

x – время сгорания первой свечи,

тогда $\dfrac{z}{x}$, $\dfrac{z}{12}$, $\dfrac{z}{8}$ – скорости сгорания первой, второй, третьей свечей соответственно.

Фраза «первая свеча была зажжена на 1 ч раньше двух других, зажженных одновременно» формализуется так:

$\dfrac{z}{x}\cdot 1$ – длина, на которую первая свеча была короче двух других свечей к моменту их зажжения.

Фраза «в некоторый момент горения первая и третья свечи имели одинаковую длину» формализуется так:

$\dfrac{\frac{z}{x}\cdot 1}{\frac{z}{8}-\frac{z}{x}}$ – время, через которое третья свеча «догонит» по длине первую.

Фраза «через 2 ч после этого первая и вторая свечи стали одинаковой длины» формализуется так:

$\dfrac{\frac{z}{x}\cdot 1}{\frac{z}{8}-\frac{z}{x}}+2$ – время, через которое вторая свеча «догонит» по длине первую (с момента зажжения второй).

Но с другой стороны, эта же величина равна $\dfrac{\frac{z}{x}\cdot 1}{\frac{z}{12}-\frac{z}{x}}$. Отсюда имеем уравнение: $\dfrac{\frac{z}{x}\cdot 1}{\frac{z}{8}-\frac{z}{x}}+2=\dfrac{\frac{z}{x}\cdot 1}{\frac{z}{12}-\frac{z}{x}} \Leftrightarrow \dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{12}-\frac{1}{x}}-\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{8}-\frac{1}{x}}=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=16, \\ x=6. \end{array}\right.$

Значение $x=6$ не подходит по смыслу, поскольку $x>12$. Поэтому искомое число равно 16.

Задача 15. Колонна автомобилей, движущихся равномерно с постоянной скоростью, имеет длину 5 км. Рядом с последним автомобилем едет мотоциклист. По приказу начальника колонны он увеличил скорость, поравнялся с головной машиной и с той же скоростью вернулся в конец колонны. За это время колонна продвинулась вперед на 5 км. Сколько километров проехал мотоциклист?

Решение. Применим МПФ. Фраза «колонна автомобилей, движущихся равномерно с постоянной скоростью, имеет длину 5 км; рядом с последним автомобилем едет мотоциклист; по приказу начальника колонны он увеличил скорость» формализуется так: пусть

x – увеличенная скорость мотоциклиста,

y – скорость колонны,

5 – длина колонны.

Фраза «мотоциклист поравнялся с головной машиной» формализуется так:

$\dfrac{5}{x-y}$ – время, за которое мотоциклист догонит головную машину.

Фраза «мотоциклист вернулся в конец колонны» формализуется так:

$\dfrac{5}{x+y}$ – время движения мотоциклиста от начала колонны к ее концу.

Фраза «за это время колонна продвинулась вперед на 5 км» формализуется так:

$\dfrac{5}{x+y}+\dfrac{5}{x-y}$ – время, затраченное мотоциклистом на проезд из конца колонны в ее начало и затем из начала – в конец.

$\dfrac{5}{y}$ – время движения колонны, в течение которого мотоциклист выполнял приказ.

Согласно вопросу задачи «сколько километров проехал мотоциклист?»,

$\dfrac{5}{y}\cdot x$ – искомая величина.

Среди составленных алгебраических выражений имеются два, равные одной и той же величине – времени, в течение которого мотоциклист выполнял приказ: $\frac{5}{y}$ и $\frac{5}{x+y}+\frac{5}{x-y}$. Отсюда получаем уравнение:

$$\frac{5}{x+y}+\frac{5}{x-y}=\frac{5}{y} \Leftrightarrow x^2-2xy-y^2=0 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^2-2\frac{x}{y}-1=0 \Leftrightarrow \frac{x}{y}=1\pm\sqrt{2}.$$

Отсюда искомая величина $\frac{5}{y}\cdot x$ равна $5\left(1+\sqrt{2}\right)$ – именно столько километров проехал мотоциклист.

Задача 16. Пешеход, идя вдоль шоссе, заметил, что каждые 6 мин его догоняет автобус и каждые 3 мин проходит встречный автобус. В обе стороны автобусы отправляются через одинаковые промежутки времени, идут без остановок с постоянной и одинаковой скоростью. Через какие промежутки времени отправляются автобусы с конечных пунктов и во сколько раз медленнее автобуса шел пешеход?

Решение. Начнем с вопроса «через какие промежутки времени отправляются автобусы с конечных пунктов и во сколько раз медленнее автобуса шел пешеход?»:

x – скорость пешехода (м/мин),

y – скорость автобусов (м/мин),

$\frac{y}{x}$ – искомая величина, означающая, во сколько раз медленнее автобуса шел пешеход,

t – временной интервал движения автобусов.

Фраза «пешеход, идя вдоль шоссе, заметил, что каждые 6 мин его догоняет автобус» формализуется так:

yt – расстояние между автобусами,

$\frac{yt}{y-x}=6$ – интервал времени, через который пешехода догоняют автобусы.

Фраза «каждые 3 мин проходит встречный автобус» формализуется так:

$\frac{yt}{y+x}=3$ – интервал времени, через который пешеход встречает идущие навстречу автобусы.

В итоге имеем систему уравнений: $\begin{cases} \frac{yt}{y-x}=6, \\ \frac{yt}{y+x}=3. \end{cases}$

Разделив почленно эти уравнения, получим $\dfrac{y+x}{y-x}=2 \Leftrightarrow y=3x$.

Подставим $3x$ вместо y в первое уравнение: $\dfrac{3xt}{3x-x}=6 \Rightarrow t=4$.

Итак, скорость автобуса в 3 раза больше скорости пешехода, а интервал движения автобусов равен 4 мин.

Задача 17*. Два пассажира начали спускаться по движущемуся вниз эскалатору метро, причем один шел вдвое быстрее другого. Один из них насчитал 40 ступенек, а второй насчитал 60. Сколько ступенек пришлось бы им отшагать по неподвижному эскалатору?

Решение. Фраза «два пассажира начали спускаться по движущемуся вниз эскалатору метро, причем один шел вдвое быстрее другого» формализуется так:

x – скорость первого пассажира (ступенек/мин) по неподвижному эскалатору,

$2x$ – скорость второго пассажира (ступенек/мин) по неподвижному эскалатору,

y – скорость эскалатора (ступенек/мин),

z – расстояние, которое надо пройти по неподвижному эскалатору,

$\dfrac{z}{x+y}$ – время спуска первого пассажира,

$\dfrac{z}{2x+y}$ – время спуска второго пассажира,

$\dfrac{z}{x+y}y$ – число ступенек, которые «пройдет» эскалатор за время спуска первого пассажира,

$\dfrac{z}{2x+y}y$ – число ступенек, которые «пройдет» эскалатор за время спуска второго пассажира.

Фраза «один из них насчитал 40 ступенек» формализуется так:

$z-40$ – число ступенек, которые «ушли» за время спуска первого пассажира.

Фраза «второй насчитал 60» формализуется так:

$z-60$ – число ступенек, которые «ушли» за время спуска второго пассажира.

Среди составленных алгебраических выражений имеются две пары выражений, одинаковых по смыслу, которые приводят к следующей системе уравнений: $\begin{cases} \dfrac{z}{2x+y}y=z-60, \\ \dfrac{z}{x+y}y=z-40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{30(2x+y)}{x}=z, \\ \dfrac{40(x+y)}{x}=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 60+\dfrac{30y}{x}=z, \\ 40+\dfrac{40y}{x}=z. \end{cases}$

Умножим первое уравнение почленно на 4, второе – на –3, а затем сложим почленно полученные уравнения. В итоге получим: $z=120$.

Задача 18. Два приятеля собрались на охоту. Один из них живет в 46 км от охотничьей базы, другой, имеющий автомобиль, в 30 км от охотничьей базы – между этой базой и домом приятеля. Они тронулись в путь одновременно, причем владелец автомобиля поехал навстречу своему приятелю, идущему пешком. Встретившись, они вместе поехали на базу и прибыли туда через час после выхода из дома. Если бы пешеход вышел из дома на 2 ч 40 мин раньше владельца автомобиля, то приятели встретились бы в 11 км от дома пешехода. Какова скорость автомобиля?

Решение. Начнем с вопроса «Какова скорость автомобиля?»: пусть
x – скорость пешехода (км/ч),
y – скорость автомобиля (км/ч).

Фраза «Встретившись, они вместе поехали на базу и прибыли туда через час после выхода из дома» формализуется так:
$y \cdot 1$ – общее расстояние, которое проехал автомобиль.

Фраза «Один из них живет в 46 км от охотничьей базы, другой, имеющий автомобиль, в 30 км от охотничьей базы – между этой базой и домом приятеля» формализуется так:
$\frac{y \cdot 1 - 30}{2}$ – расстояние (км), которое проехал автомобиль до встречи с пешеходом,
$16 - \frac{y \cdot 1 - 30}{2} = \frac{62 - y}{2}$ – расстояние, пройденное пешеходом до встречи,
$\frac{y \cdot 1 - 30}{2y}$ – время (ч), которое ехал автомобиль до встречи,
$\frac{62 - y}{2x}$ – время, которое шел пешеход до встречи.

Фраза «Если бы пешеход вышел из дома на 2 ч 40 мин раньше владельца автомобиля, то приятели встретились бы в 11 км от дома пешехода» формализуется так:
$\frac{11}{x}$ – время (ч) движения пешехода до встречи с момента выхода пешехода из дома,
$2\frac{2}{3}$ – время движения пешехода до начала движения автомобиля,
$\frac{11}{x} - 2\frac{2}{3}$ – время движения пешехода до встречи с автомобилем с момента начала движения автомобиля,
$\frac{5}{y}$ – время движения автомобиля до встречи с пешеходом с момента начала движения автомобиля.

Среди составленных алгебраических выражений имеются две пары выражений, одинаковых по смыслу, которые приводят к следующей системе уравнений: $\begin{cases} \dfrac{y-30}{2y}=\dfrac{62-y}{2x}, \\ \dfrac{11}{x}-2\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2\text{x}}=\dfrac{y-30}{2y(62-y)}, \\ \dfrac{11}{x}=\dfrac{8y+15}{3y}. \end{cases}$

Разделив почленно эти уравнения, получим: $\dfrac{1}{11}=\dfrac{3(y-30)}{(62-y)(8y+15)} \Leftrightarrow$ $y=60$ км/ч.

* *Имеются текстовые задачи, при решении которых можно обойтись без введения переменных и, следовательно, без использования* МПФ (*подобный способ решения будем называть арифметическим*). *С такими задачами учащиеся, например, встречаются в начальных классах, прежде чем знакомятся с понятием алгебраического уравнения. Арифметический способ эффективен там, где элементарные рассуждения позволяют заменить громоздкую систему уравнений* (*см. задачи* 19*-20*).

Задача 19*. Два брата имели билеты на стадион, расположенный в 10 км от их дома. Сначала они собирались идти вместе на стадион пешком, но изменили намерение и решили воспользоваться велосипедом, договорившись, что один отправится на велосипеде, а другой одновременно с ним – пешком. Проехав часть пути, первый оставил велосипед, а второй, дойдя до оставленного велосипеда, поехал на нем дальше и догнал первого у входа на стадион. При этом каждый из них пешком шел с той же скоростью, с какой они планировали вначале идти вместе на стадион. Сколько времени выиграли братья по сравнению с первоначальным планом идти весь путь пешком, если каждый из них на велосипеде преодолевал каждый километр на 12 мин быстрее, чем пешком?

Решение. *Арифметический способ.* Поскольку братья затратили на весь путь одинаковое время, шли пешком с одинаковой скоростью и их скорости на велосипеде также были равны, то пешком они прошли одинаковые расстояния. Поскольку в сумме пешком они прошли 10 км, следовательно, каждый из них прошел пешком 5 км. Поэтому выигрыш во времени составил $5\cdot 12=60$ ì èí .

Для сравнения *решим эту же задачу с помощью* МПФ (детали опускаются):

x – скорость братьев пешком (км/мин),

y – скорость их на велосипеде (км/мин),

$\dfrac{1}{x}$ – время (мин), за которое они проходили 1 км,

$\dfrac{1}{y}$ – время, за которое они проезжали 1 км на велосипеде,

z – расстояние (км), которое первый проехал на велосипеде (второй прошел пешком),
$10-z$ – расстояние, которое второй проехал на велосипеде (первый прошел пешком),
$\frac{z}{y}+\frac{10-z}{x}$ – время первого брата в пути,
$\frac{z}{x}+\frac{10-z}{y}$ – время второго брата в пути.

Отсюда имеем систему уравнений
$$\begin{cases}\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=12,\\ \frac{z}{y}+\frac{10-z}{x}=\frac{z}{x}+\frac{10-z}{y}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{y}-\frac{1}{x}=12,\\ (2z-10)\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)=0\end{cases} \Leftrightarrow z=5.$$

Отсюда $5\cdot 12=60$ (мин) – искомая величина.

Задача 20*. Имеется 5 ведер с водой. Из первого ведра перелили $1/5$ часть имеющейся в нем воды во второе ведро, затем из второго ведра $1/5$ часть оказавшейся там после переливания из первого ведра воды перелили в третье ведро и т. д. Наконец, из пятого ведра перелили $1/5$ часть оказавшейся в нем после переливания из четвертого ведра воды в первое ведро. После этого в каждом ведре оказалось a л воды. Сколько воды было первоначально в каждом ведре?

Решение. После того как из второго и третьего ведер забрали $1/5$ часть имевшейся в них воды, по условию в них оказалось одинаковое количество воды. Поэтому в момент, предшествующие забору воды из этих ведер, в них было равное количество воды. Поэтому из третьего ведра забрали столько же воды, сколько забрали из второго. Другими словами, в третье ведро из второго долили столько же воды, сколько затем из третьего забрали, т. е. количество воды в третьем ведре в результате переливаний не изменилось (осталось равным a л). Кроме того, после забора из третьего ведра $1/5$ части воды оставшиеся в нем a л составили $4/5$ части от имевшейся после переливания из второго, т. е. сразу после переливания из второго ведра в третьем оказалось $\frac{5}{4}a$ л воды.

Аналогичные рассуждения применимы также к четвертому и пятому ведру, в которых количество воды также осталось равным a л, причем из пятого в первое перелили $1/5$ часть от $\frac{5}{4}a$ л, т. е. $\frac{a}{4}$ л воды.

Следовательно, в первом ведре в момент, предшествующий переливанию из пятого, имелось $\frac{3}{4}a$ л. Эти $\frac{3}{4}a$ л составляли $4/5$ части от того, что было в первом ведре первоначально (вспомним, что из первого ведра сразу забрали $1/5$ часть воды). Следовательно, в первом ведре первоначально было $\frac{15}{16}a$ л. Следовательно, $\frac{3}{16}a$ л воды из первого ведра перелили во второе, и в нем оказалось $\frac{5}{4}a$ л воды. Значит, во втором ведре первоначально было $\frac{5}{4}a-\frac{3}{16}a=\frac{17}{16}a$ л воды. Итак, в ведрах первоначально было $\frac{15}{16}a,\ \frac{17}{16}a,\ a,\ a,\ a$ литров воды соответственно.

* *Как мы видим, задача успешно решена арифметически. Более того, прямолинейное применение* МПФ *привело бы к достаточно громоздким уравнениям, число которых определялось бы числом* n *ведер в условии задачи. Приведенное же здесь арифметическое решение легко распространяется на произвольное значение* n.

Иногда можно натолкнуться на нетипичную текстовую задачу, которая рассчитана на здравый смысл и не подразумевает ни применения МПФ, *ни арифметического способа решения. В качестве примера приведем задачу* 21*.

Задача 21*. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 110 км, с постоянной скоростью выезжает автобус. Через 30 мин за ним выезжает мотоциклист со скоростью 60 км/ч, который, догнав автобус, возвращается обратно в пункт A с прежней скоростью. Найти максимально возможное целое значение скорости (в км/ч), при котором автобус прибывает в пункт B раньше, чем мотоциклист возвращается в пункт A.

Решение. В задаче требуется найти максимально возможное значение скорости автобуса (обозначим ее через x), при которой он прибывает в пункт B раньше, чем мотоциклист возвращается в A. Однако ясно, что для выполнения этого требования скорость автобуса можно наращивать неограниченно. Чем же ограничена эта скорость (помимо мощности мотора)? Это ограничение «спрятано» в самом условии задачи, подразумевающем, что мотоциклист догонит автобус еще до прибытия последнего в пункт B. Поэтому максимально возможная скорость автобуса – эта та скорость, при которой автобус будет настигнут мотоциклистом в момент прибытия автобуса в пункт B. А так как с момента начала движения мотоциклиста автобус будет находиться в пути еще $\frac{110-x\cdot 0{,}5}{x}$ ч, а время движения мотоциклиста из A в B равно $\frac{110}{60}$, то максимальное значение скорость x принимает в случае равенства $\frac{110}{60}=\frac{110-x\cdot 0{,}5}{x}$, откуда $x=\frac{330}{7}=47\frac{1}{7}$. Поскольку в задаче требуется найти максимальное целое значение x, то искомым значением будет 47 км/ч.

В ходе применения МПФ *могут, помимо уравнений, появляться и неравенства. В этих случаях следует с помощью уравнений и метода прямой подстановки свести число переменных в неравенствах к одной и затем воспользоваться целочисленностью оставшейся переменной, чтобы добыть ее значение из неравенства* (*см. задачу* 22*).

Задача 22*. Школьник переклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 20 марок на один лист, то ему не хватит альбома, а если по 23 марки на лист, то по крайней мере один лист останется пустым. Если же школьнику подарить еще такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 21 марке, то всего у него станет 500 марок. Сколько листов в альбоме?

Решение. Обозначим через n число листов в альбоме, а через m – первоначальное число марок у школьника.

Фраза «если он наклеит по 20 марок на один лист, то ему не хватит альбома» означает, что $20n < m$.

Фраза «если он наклеит по 23 марки на лист, то по крайней мере один лист останется пустым» означает, что $23(n-1) \ge m$.

Фраза «подарили такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 21 марке» означает, что у школьника станет $m + 21n$ марок, число которых равно 500.

В итоге имеем систему:

$$\begin{cases} m + 21n = 500, \\ 20n < m, \\ 23(n-1) \ge m. \end{cases}$$

Из уравнения выразим переменную m и исключим ее из неравенств:

$$\begin{cases} m = 500 - 21n, \\ 20n < 500 - 21n, \\ 23(n-1) \ge 500 - 21n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 41n < 500, \\ 44n \ge 523 \end{cases} \Rightarrow \frac{523}{44} \le n < \frac{500}{41} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 11,8... \le n < 12,1... \Rightarrow n = 12.$$

С уважением, Жанна Альбертовна